Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 8/02/2021

1) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(x^2)-\cos(x)}{x^2+x}\,.$$

2) Data la funzione
$$f(x) \;=\; \frac{x^3+x^2-5x+3}{x+3}\,,$$
dire quale tipo di discontinuità presenta nel punto di ascissa $x_0 = -3$

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) \;=\; \frac{\log(x+1)}{\log(x-3)}$$
e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare
$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx\,.$$

Soluzione

1) Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Applicando, per esempio, il teorema de l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(x^2)-\cos(x)}{x^2+x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)+\sin(x)}{2x+1} = 0$$

2) Calcoliamo il limite della funzione per x che tende a -3. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ e si ha

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x+3} \overset{H}{=} \lim_{x\to -3} \frac{3x^2+2x-5}{1} = 16\,.$$

La discontinuità è **eliminabile** poiché il limite precedente risulta finito.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x+1>0$, $x-3>0$ e $x-3\neq 1$. Si ha quindi

$$D =]3,4[\cup]4,+\infty[\,.$$

Si ha

$$f'(x) \;=\; \frac{\frac{\log(x-3)}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x-3}}{\log^2(x-3)}\,.$$

4) Risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx \;&=\; \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx \\ &=\; \frac{1}{4}\log(1+x^4)+C\end{aligned}$$